Método

de los multiplicadores de Lagrange. Interpretación general y económica de éstos

Fernando Suárez
Docente Facultad de Ciencias Económicas

Introducción

En las Ciencias Económicas se plantea un problema básico que es el de la distribución de unos recursos limitados de la mejor forma posible, esto es, de forma óptima. Este problema se conoce en matemática como un problema de programación matemática, ya que ésta se define como la optimización de una función sujeta a unas restricciones, y dentro de ésta se encuentra la programación clásica como un caso especial, que consiste en optimizar $f(\vec{x})$ sujeta a $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{c}$. Un método clásico para resolver este tipo de problema es el método de multiplicadores de Lagrange.

Podemos considerar el problema de la programación clásica: buscar $\vec{x}$ que satisface: OPT $f(\vec{x})$ sujeta a $g(\vec{x}) = c$. Un método para resolver este tipo de problema es el método de los multiplicadores de Lagrange, este método toma el nombre de su descubridor, el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813).

Tenemos: OPT $f(\vec{x})$ sujeta a $g(\vec{x}) - \vec{c}$ donde lo que sería equivalente a OPT $f(\vec{x})$ sujeta a $g(\vec{x}) - \vec{c} = \vec{0}$ donde OPT significa maximizar o minimizar, y, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)\ \vec{0} = (0, 0, \dots, 0), \vec{g}(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), g_2(\vec{x}), \dots \vec{g}_n(\vec{x})), \vec{c} = (c_1, c_2, \dots c_n)$.

El problema consiste en formular la siguiente función de Lagrange o Lagrangiano o función objetivo: $L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda[g(\vec{x}) - \vec{c}]$, donde $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m)$, o sea la función $f(\vec{x})$ menos $\vec{\lambda}$ multiplicado por la restricción. El valor $\vec{\lambda}$ tendrá tantas componentes como restricciones tenga el problema; expadiendo tenemos:

$$L(x_1, x_2, \dots x^n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots 2_n) - \sum_{i01}^{m} \lambda_i [g(x_1, x_2, \dots x_n) - c_i]$$

donde las m nuevas variables λ_i se llaman multiplicadores de Lagrange.

Hay que notar que la función de Lagrange $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ es equivalente a la función $f(\vec{x})$ debido a que $[\vec{g}(\vec{x}) - \vec{c}] = \vec{0}$, y puede demostrarse que si $(\vec{x}, \vec{\lambda}) = (\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$, es un óptimo local o global para la función con restricciones $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$ entonces $\vec{x} = \vec{x}^*$ es un óptimo local o blobal para el problema original. Como resultado, el métdo se reduce a encontrar el punto crítico para la función con restricciones $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$.

Vamos entonces a encontrar los puntos críticos para la función de Lagrange.

Para hallar los puntos críticos de una función de varias variables hay que igualar sus derivadas parciales a cero, en este caso.

$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ donde j = 1, 2,..., n

$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0$ donde i = 1, 2,..., m

desarrollando

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_{i=1}^{m} \lambda i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -[g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c_i] = 0$$

Entonces nos queda el sistema de ecuaciones:

$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda i \frac{\partial g_i}{\partial x_i} = 0$ j = 1, 2,..., n

$c_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ i = 1, 2,..., m

Y los puntos críticos corresponderán a la solución de este sistema de n + m ecuaciones, teniendo a $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda m$ como las n + m incógnitas. La solución será: $(x_1^*, \ldots, x_n^*, \ldots, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$.

Nótese que las últimas ecuaciones son equivalentes a las restricciones del problema original, lo que nos indica que se están tomando en cuenta solamente soluciones factibles, o sea, aquellas soluciones que satisfacen las restrucciones.

Después de identificar el óptimo global de $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$, que denotamos $(x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, el valor $(x_1, \ldots, x^n) = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ es la solución buscada del problema original.

Para ejemplificar consideremos el problema de producción, donde queremos maximizar $p = f(x,y) = X^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{1}{3}}$ sujeta a la restricción de presupuesto g (x, y) = x + y = 3,78.

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$\frac{2}{3} X^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - \lambda = 0$

$\frac{1}{3} X^{\frac{2}{3}} Y^{\frac{2}{3}} - \lambda = 0$

x + y = 3.78

y obtenemos x = 2.52, y = 1.26 0.53

Supongamos que el presupuesto se aumenta de 3.78 a 4.78 obteniéndose una nueva ecuación de presupuesto x + y = 4.78. La solución correspondiente es: x = 3.19, Y = 1.59, y el nuevo máximo es $p = (3,19)^{\frac{2}{3}} (1,59)^{\frac{1}{3}} = 2.53$ (en lugar de p = f (2.52, 1, 26) = 2).

Notemos que la cantidad en la cual f se aumenta es 0.53 que es el valor de λ. Así en este ejemplo, el valor de λ representa la producción extra alcanzada por el incremento de una unidad en el presupuesto.

En resumen:

El valor de λ es aproximadamente el incremento en el valor óptimo de f cuando el presupuesto se incrementa en una unidad, más precisamente: el valor de λ representa la tasa de cambio del valor óptimo de f cuando el presupuesto aumenta.

El Significado de λ en General:

Para incrementar λ en general, miramos cómo el valor óptimo de la función objetivo f cambia cuando el valor c de la restricción g, varía. Sea (x^*, y^*) el punto óptimo que depende de c es decir: $x^* = x^*(c)$, y, $y^* = y^*(c)$ funciones diferenciales de c, usando la regla de la cadena para diferenciar el valor óptimo f (x* (c), y* (c)) con respecto a c se obtiene:

$$\frac{df}{dc} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx^*}{dc} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy^*}{dc}$$

en el punto óptimo (x^*, y^*), se tiene $f^x = lg_x$, y, f_y - lg_y, y por consiguiente:

$$\frac{df}{dc} = \lambda \left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx^*}{dc} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy^*}{dc} = \right)\lambda \frac{dg}{dc}$$

como $g(x^*(c), y^*(c)) = c$, vemos que $\frac{df}{dc} = 1$, y por lo tanto $\frac{df}{dc} = \lambda$. Así tenemos la siguiente interpretación del multiplicador de Lagrange: el valor de λ es la tasa de cambio del valor óptimo de f cuando c aumenta (donde g (x,y) = c). Si el valor óptimo de f se escribe como $f(x^*(c), y^*(c))$, entonces tenemos:

$$\frac{d}{dc} f(x^*(c), y^*(c)) = \lambda$$

Generalicemos este resultado: usando $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)$, se puede formular más concisamente el Lagrangiano general como:

OPT $f(\vec{x})$ sujeta a $g_i(\vec{x}) = c_i$, i = 1,...,m (1)

Sean $x_1^*, \ldots, x_n^*$ los valores de $x_1, \ldots, x_n$ que verifican las condiciones necesarias para la solución de (1) en general $x_1^*, \ldots, x_n^*$, depende de los valores de $c_1, \ldots, c_m$ suponemos que $x_i^* = x_i^*(c_1, \ldots, c_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ son funciones diferenciales de $c_1, \ldots, c_m$ en símbolos , si se pone $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, y, $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_m)$, entonces: $f^*(\vec{c}) = f(\vec{x}^*(c)) = f(x_1(c), \ldots, xn(c))$ la función f^* se llama la función valor óptimo del programa (1). Los multiplicadores de Lagrange asociados a x^* dependen también de $c_1, \ldots, c_m$ bajo unas ciertas hipótesis de regularidad se tiene:

$$\frac{\partial f^*(\vec{c})}{\partial c_i} = \lambda_i(\vec{c}) \quad (i = 1,\ldots,m)$$

El multiplicador de Lagrange $\lambda_i = \lambda_i(\vec{c})$ de la i-ésima restricción en la tasa de variación del valor óptimo de la función objetiva respecto a los cambios de la constante c_i. El número λ_i se llama precio sombra o valor marginal de una unidad del recurso i.

Interpretación económica de los multiplicadores de Lagrange

Para aquellos problemas de asignación económica en los que la función de Lagrange tiene la interpretación de una valor, es decir, precio multiplicado por cantidad (beneficios, ingresos, costos) y las restricciones representan las limitaciones para los recursos disponibles que tiene un valor dado (materia prima, mano de obra, etc), el multiplicador de Lagrange mide la sensibilidad del Lagrangiano a los cambios en la cantidad de dicho recurso, en consecuencia representa un precio que suele llamarse precio sombra del recurso.

Si λ_i es el multiplicador de Lagrange correspondiente al recurso i, entonces λ_i será la contribución a la ganancia proporcionada por cada unidad del recurso i, en consecuencia el precio sombra óptimo para el recurso $i(\lambda^*)$, representa el máximo precio unitario que se estaría dispuesto a pagar para aumentar la cantidad de recurso i en una unidad.

Si el precio sombra es mayor que el costo unitario actual del recurso i, entonces la cantidad de recurso i debe ser incrementada hasta que el precio sombra sea igual al costo unitario.

Observaciones

Debe tomarse en cuenta que desde el punto de vista práctico, el método de los multiplicadores de Lagrange no es un procedimiento particularmente poderoso, ocurre a menudo que es imposible resolver el sistema de ecuaciones para obtener los puntos críticos. A veces, aún cuando puedan ser obtenidos, el número de puntos críticos puede ser tan grande que es poco práctico tratar de identificar el óptimo global.

Es por esto, que hoy en día se han desarrollado métodos particulares para resolver esta clase de problemas a través de la programación lineal y no lineal que está dentro de lo que se conoce como investigación de operaciones.

Bibliografía

Alpha Chiang Métodos Fundamentales de Economía Matemática, editorial Mc Graw Hill/1984.

Sydaeter y Hammond, Matemática para el análisis económico, editorial Prentice Hall/1996.