Revista Facultad de Ciencias Básicas
2021 Vol. 17(1)
enero - junio ▪ ISSN: 1900-4699 · e-ISSN: 2500-5316 ▪ pp. 9-25

Editorial Neogranadina

DOI: https://doi.org/10.18359/rfcb.5283

Comprensión del concepto de *infinito actual* y su relación con las funciones reales: el infinito y el modelo de van Hiele*

Alba Soraida Gutiérrez Sierra[a] ▪ René Alejandro Londoño Cano[b]

Resumen: este artículo surge de la reflexión de los resultados parciales de la investigación *El concepto de infinito actual en el marco del modelo de van Hiele*, cuyo propósito fue describir la comprensión de tres estudiantes de grado once de una institución educativa colombiana de carácter oficial, frente al concepto de *infinito actual* y su relación con funciones de variable real. Con ese propósito, se diseñó un instrumento de indagación permanente, consistente en una entrevista semiestructurada de carácter socrático. Para validar el instrumento, se propusieron descriptores hipotéticos que, refinados durante el proceso de investigación, contribuyeron a obtener los descriptores finales, para diseñar la entrevista definitiva y, a través de ella, a la luz del modelo de van Hiele, reconocer y clasificar el nivel de compresión de los estudiantes frente al concepto en cuestión. En cuanto al desarrollo metodológico se adoptó el enfoque cualitativo, con estudio de caso, que busca transformar la realidad en un contexto educativo particular, con miras a producir conocimiento práctico que pueda ser generalizado.

Palabras clave: Cantor, comprensión; descriptores; infinito potencial; modelo de van Hiele

Recibido: 26 de septiembre de 2020

Aceptado: 09 de abril de 2021

Disponible en línea: 19 de noviembre de 2021

Cómo citar: A. S. Gutiérrez Sierra y R. A. Londoño Cano, «Comprensión del concepto de *infinito* actual y su relación con las funciones reales: el infinito y el modelo de van Hiele», Rev. Fac. Cienc. Básicas, vol. 17, n.º 1, pp. 9-26, nov. 2021.

* Artículo de investigación.

a Magíster en Educación, licenciada en Matemáticas. Universidad Metropolitana de Educación Ciencia Tecnología (Umecit), Panamá, Panamá.
Correo electrónico: albasoraidagutierrez@gmail.com ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6285-439X

b Doctor en Educación, magíster en Educación, especialista en Docencia de las Matemáticas, licenciado en Ciencias de la Educación, Matemáticas y Física. Universidad Metropolitana de Educación Ciencia Tecnología (Umecit), Panamá. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
Correo electrónico: renelondo@gmail.com ORCID: http://orcid.org/0000-0003-2073-3474

Understanding the Concept of Current Infinity *and its Relationship to Real Functions: Infinity and the Van-Hiele Model*

Summary: this article arises from the reflection of the research's partial results: the concept of *current infinity in the framework of the model of van Hiele*. The purpose was to describe the understanding of three students of eleven grade in an Official Colombian Educational Institution, facing the concept of *current infinity* and its relationship with real variable functions. For this, an instrument of permanent inquiry was designed, consisting of a semi-structured interview of Socratic nature. To validate the instrument, hypothetical descriptors were proposed that, refined during the research process, contributed to obtain the final descriptors, to design the final interview and, through it, in the light of van Hiele's model, recognize and classify the students' level of understanding against the concept under consideration. About the methodological development, the qualitative approach was adopted, with a case study, which seeks to transform reality in a particular educational context, with the intention of producing practical knowledge that can be generalized.

Keywords: Cantor, comprehension; descriptors; infinite potential; van Hiele model

Compreensão do conceito de "infinito atual" e sua relação com as funções reais: o infinito e o modelo de van Hiele

Resumo: este artigo surge da reflexão dos resultados parciais da pesquisa "O conceito de infinito atual no âmbito do modelo de van Hiele", cujo objetivo foi descrever a compreensão de três estudantes do último ano do ensino médio de uma instituição educacional colombiana de caráter oficial, ante o conceito de infinito atual e sua relação com funções de variável real. Com esse objetivo, foi desenhado um instrumento de indagação permanente, consistente numa entrevista semiestruturada de caráter socrático. Para validar o instrumento, foram propostos descritores hipotéticos que, refinados durante o processo de pesquisa, contribuíram para obter os descritores finais, para desenhar a entrevista definitiva e, por meio dela, à luz do modelo de van Hiele, reconhecer e classificar o nível de compreensão dos estudantes ante o conceito em questão. Quanto ao desenvolvimento metodológico, foi adotada a abordagem qualitativa, com estudo de caso, que procura transformar a realidade num contexto educacional particular, com vistas a produzir conhecimento prático que possa ser generalizado.

Palavras-chave: Cantor, compreensão; descritores; infinito potencial; modelo de van Hiele

Introducción

Las matemáticas son un saber imprescindible que permite conocer y comprender el universo, lo que explica que el pensamiento matemático se desarrolle en todos los seres humanos cuando se enfrentan a múltiples tareas cotidianas [1].

La problemática abordada en la presente investigación muestra que, cuando los estudiantes se acercan al concepto de *infinito*, lo hacen desde una noción intuitiva, relacionada con los conceptos de *cantidad* y *tamaño*, lo que genera una serie de contradicciones conceptuales, frente al hecho de que no pueden establecer con claridad la conexión directa del infinito con otros objetos matemáticos. Con respecto al tema, se evidencia que el bajo rendimiento de los estudiantes en cursos de cálculo diferencial e integral se encuentra asociado con la construcción del concepto de función. Una de las razones más relevantes de ello es la comprensión deficiente e incompleta del concepto de *infinito actual* y el papel que cumple en la teoría de conjuntos [2].

Es de anotar que este último concepto ha sido habitualmente una polémica, por lo que genera dificultades en la comprensión de las funciones de variable real. Al no tener clara la relación de estos dos conceptos en el cálculo, pueden surgir dificultades frente a la modelación de situaciones y fenómenos de tipo variacional, que impiden comprender los conceptos involucrados en el análisis funcional [3]. Algunos autores han demostrado la evolución e implicaciones del concepto de función y su relación con el concepto de *cardinalidad* y explican que tiene una íntima relación con los conceptos primitivos de *conjunto*, *cantidad* y *número*. Esto conlleva a diversas concepciones acerca del infinito [4].

Al respecto, de acuerdo con el análisis realizado en la revisión bibliográfica, fue posible evidenciar que, a la hora de ser enseñados, algunos objetos matemáticos generan dificultades de comprensión en los estudiantes. Esto, en ocasiones, es atribuido al registro lingüístico (metalenguaje matemático) usado por el maestro, que no está en concordancia con el nivel de sus educandos.

Por otro lado, el modelo de van Hiele es pertinente para describir la comprensión y establecer el nivel de razonamiento de los estudiantes frente a un objeto matemático cualquiera que, para el caso particular, concierne al concepto de *infinito actual*. El modelo ha sido implementado en diversas experiencias educativas y respaldado por investigaciones a nivel de programas de maestría y doctorado en las últimas dos décadas, varias de ellas relacionadas con el análisis de la comprensión de los estudiantes en conceptos matemáticos, ligados con procesos de razonamiento infinito que no necesariamente producen resultados infinitos, entre ellas, los conceptos de aproximación local, como el de límite, convergencia de sumas infinitas y el teorema fundamental del cálculo, entre otros.

A continuación, se enuncian algunas investigaciones en esta dirección: estudio comparativo del concepto de aproximación local [5], módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de serie de términos positivos [6], relación inversa entre cuadraturas y tangentes dentro de la teoría de Pirie y Kieren [7], la comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren [8], relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele [9] y extensión del modelo de van Hiele al concepto de área [10], entre otros; con los cuales se amplía el fundamento teórico para consolidar las bases que sustentan la investigación.

Estado del arte

En su tesis doctoral *Estudio del infinito actual como identidad cardinal en estudiantes de educación secundaria de 13 a 16 años*, Prieto [11] indagó las capacidades, habilidades y estrategias cognitivas que manifiestan los estudiantes de 13-16 años de educación secundaria, ante tareas que requieren comparar conjuntos para identificar el infinito actual como identidad cardinal. Se plantean dos métodos de comparación: el de Bolzano y el de Cantor. El primero se utilizó como soporte de una experiencia física; el segundo se establece en un modelo evolutivo de competencias.

El objetivo general de ese trabajo doctoral fue analizar la naturaleza y la evolución de competencias lógicas del infinito actual como identidad cardinal. Se utilizó el método empírico cualitativo de metodología mixta, e incluyó una prueba piloto. Reconsiderando el infinito actual como identidad cardinal tras la comparación de conjuntos numéricos, se llegó a la conclusión de que dicho conocimiento no surge del vacío, por el contrario, es necesario un cúmulo de competencias lógicas en los estudiantes de educación secundaria. Tal es el caso de las sucesiones de términos numéricos, criterios de comparaciones, la admisión del infinito potencial y posteriormente la aceptación o el rechazo del infinito actual.

Mena *et al.* [12] establecieron que los obstáculos epistemológicos tienen raíces profundas en matemáticas, los cuales, por lo regular, pasan inadvertidos por el docente. El infinito es una noción compleja de abordar en diferentes niveles de escolaridad y se relaciona con temas como límites, series, axioma del supremo, procesos recursivos y conjuntos infinitos y acotados. En la investigación, encontraron una dificultad cognitiva experimentada por los participantes, al confundir los planos semántico y teórico. Los participantes manifestaron espontánea y públicamente la necesidad de aprender teorías didácticas que les permitieran profundizar en categorías de análisis para superar obstáculos. Se estableció que el tránsito del infinito potencial al infinito actual es difícil; además, parece claro que, si se desea conseguir que los estudiantes logren desarrollar un concepto apropiado de infinito, se necesita modificar las estrategias utilizadas y considerar que también los profesores pueden enfrentar dificultades con el concepto.

En *El infinito: problemas para el aprendizaje en un tema de cálculo,* Garelik [13] analizó las concepciones del infinito que prevalecen en estudiantes del primer año de carreras de ingeniería, al enfrentarse a procesos infinitos que generan obstáculos didácticos y epistemológicos en relación con las distintas representaciones semióticas del concepto de infinito, después de revisar las respuestas a situaciones formuladas en contextos diferentes. En la enseñanza que se imparte regularmente en los cursos de matemáticas, no se prioriza la comprensión del concepto, y en su lugar, se implementan procedimientos mecánicos para el abordaje de problemas. Las respuestas observadas en los alumnos en las dos fases de esta experiencia proporcionaron indicadores acerca de la conveniencia del trabajo en diferentes contextos, en particular, geométricos y analíticos, para la construcción de conceptos sustentados en procesos infinitos; los cuales favorecen los procesos intuitivos comprender las nociones y realizar actividades matemáticas relacionadas.

A su vez, en “Nociones del infinito en futuros profesores de matemática”, Vicent [14] analizó la concepción de los profesores de matemática que los lleva a vincular el término de infinito con lo inacabado. La investigación se centra en interpretar las representaciones sobre el concepto en estudio de un grupo de bachilleres de la especialidad de matemáticas. Expone la evolución histórica y la noción de infinito desde Aristóteles hasta Cantor. Se ayuda de un paradigma interpretativo y su estudio es fenomenológico. Además, parte de obtener información por medio de grupos focales, para concluir que, primero, prevalece la concepción potencial de infinito, es decir, se relaciona con lo muy grande; Segundo, existe un amplio margen para identificar lo intangible e incierto con este concepto, sobre todo, en la creación literaria. Ello significa que no hay reconocimiento explícito del infinito actual.

En lo pedagógico, Vicent observa que tal concepto pasa desapercibido como estudio formal, lo que puede ocasionar errores epistemológicos alrededor del concepto. Asimismo, en su estudio afirma que la concepción de lo infinito está determinada desde los contextos sociales y no desde el campo profesional específico y se asocia con cuestiones intangibles e inciertas. La falta de autonomía en el proceso de aprendizaje convierte al alumno en un *repetidor* de sus propios maestros, lo cual lo imposibilita para cuestionar lo que le enseñan o, por lo menos, para construir un concepto propio.

Una aproximación conceptual al infinito

Para el presocrático Demócrito, el mundo estaba constituido por un número *infinito* de átomos indivisibles y eternos, es decir que su existencia no cesa y, cualitativamente, son iguales y se mueven en un vacío eterno. De otro lado, para Zenón de Elea, la divisibilidad del continuo era *infinita*, es decir, no existe un límite en la división de la materia y toda partícula que no pueda verse no existe.

Por su parte, Platón consideraba que la unidad del universo es infinita, porque no nace ni muere, no hay principio ni fin. En relación con lo anterior, Aristóteles indicaba que el universo infinito era limitado. Estas ideas permitieron generar la distinción entre el *infinito potencial* y el *infinito actual*. Para el pensamiento griego el infinito es la idea de algo inconcebible. La escuela estoica, por ejemplo, concebía el infinito como un contenedor del cosmos y un cúmulo de repeticiones infinitas.

Ya en la Edad Media, el pensamiento cristiano asociaba la idea de infinito con el problema de la eternidad, afirmando que solo Dios es infinito [15]. En el siglo XVII [15], Giordano Bruno defendía la postura de la infinitud del universo, como un conjunto que se transforma perennemente desde lo inferior a lo superior, por ser todo uno y la misma cosa. Para Nicolás de Cusa, el universo, perennemente penetrado de vida, era un organismo infinito del mismo orden y con el mismo Dios [15].

Ahora bien, con la Revolución científica y el adelanto de las matemáticas, junto con la revelación casi simultánea del análisis infinitesimal, también llamado cálculo infinitesimal, de Leibniz y Newton, se sostiene la concepción infinitista. Casi todos los filósofos del periodo moderno, principalmente los racionalistas, participan de la idea de la infinitud del mundo, pues pensar en ciertos límites abre la posibilidad de pensar en qué hay más allá de dichos límites, lo que está en estrecha relación con el infinito potencial.

Por su parte [15], el infinitésimo de Leibniz era pluralista y en cada universo parecía haber infinitos universos; además, para este filósofo la infinitud no era enigmática ni irracional, sino mensurable, porque puede ser operada con infinitos, por lo menos con lo infinitamente pequeño.

A su turno, Kant consideraba que puede probarse tanto la tesis de que el mundo tiene un principio en el tiempo y está limitado en el espacio (como hacen los dogmáticos) como la antítesis, o sea, que el mundo no tiene comienzo y es ilimitado (según afirman los empiristas). Después, para Hegel, lo infinito positivo era el ser verdadero, lo que es en sí, el espíritu [15].

En este periodo, además, se esbozan los estudios a través de la exploración de los diversos legados desde Aristóteles con las paradojas de Zenón, hasta los transfinitos [16], resaltando las revelaciones de la intuición y el pensamiento metafórico.

En este sentido, se abordan los modelos intuitivos tácitos que subyacen al conocimiento y se analiza su evolución a medida que la instrucción tiene un mayor peso específico en la formación matemática. Una intuición o, en particular, una idea intuitiva pueden comprenderse como una concepción cerrada, que por lo general se establece prematuramente. Esto, debido a la falta de información que se oculta de manera que la persona la entiende coherente, completa e inmediata [17]. Por otro lado, los estudios centrados en estrategias de enseñanza-aprendizaje han descrito algunos procesos que suceden en la mente en la construcción de ciertos objetos matemáticos [18], [19].

El infinito y su enseñanza en las matemáticas

El concepto de infinito inicia desde la formación escolar con el *infinito potencial* y sigue en el proceso de conteo, es decir, en la cardinalidad y ordinalidad de distintos conjuntos numéricos; además de operaciones aritméticas cuyas soluciones son de tipo finito o infinito [20]; posteriormente, continúa con el cálculo infinitesimal, en el ámbito técnico científico a nivel universitario. Es tratado en temas como la noción de límite, número real, sucesión, derivada, tangente y otros.

En la enseñanza de las matemáticas, la incorporación del infinito permite dar una mirada de la literatura científica de diversos estudios, para tratar de comprender el papel que desempeña en la construcción de objetos matemáticos. Por tanto, se considera que el concepto de infinito es esencial para comprender nociones matemáticas como límite, continuidad, derivada, integral, sucesiones, funciones y series, entre otras [21]. Además se establece que el infinito se encuentra vinculado con conceptos numéricos y geométricos.

Asimismo, se considera que comprender el concepto de infinito en algunos casos está ligado con el nivel de razonamiento del estudiante, pues tal concepto se construye gradualmente, desde las interpretaciones intuitivas y relacionadas con el entorno en que interactúa [22]. De igual manera, al inicio de las operaciones formales, los sujetos comienzan a tener una percepción contradictoria del infinito, dados los contrastes que ellos observan cuando evidencian que resultados de naturaleza finita o infinita pueden provenir de procesos de razonamiento infinito. Es el caso de la suma infinita de los inversos multiplicativos de los números naturales (serie armónica), cuyo resultado es infinito, en contraste con la suma infinita de los inversos multiplicativos de las potencias de dos (serie de razón ½), cuyo resultado es finito.

A demás, el concepto de infinito puede servir como recurso para la construcción de situaciones didácticas. Esto permite lograr el desequilibrio cognitivo necesario para la adquisición o establecimiento de nuevas concepciones y reconceptualizaciones relacionadas con el infinito.

Al reflexionar acerca de algunas concepciones sobre el infinito y los obstáculos epistemológicos que pueden surgir al tratar de comprender este concepto, distintos modelos y teorías tratan de explicar por qué ocurre esto. Desde el fenómeno del aplastamiento que proponen Arrigo [23] y Arrigo y D'Amore [24], el modelo intuitivo y el fenómeno de deslizamiento, se observa la contradicción que subyace entre *lo intuitivo* y *lo formal*, al momento de tratar de comprender el infinito como objeto enseñable, a través de las prácticas de aprendizaje de la construcción del infinito (figura 1).

En concordancia con la figura 1, Belmonte [22] y Arrigo y Sbaragli [23] resaltan que los registros semióticos comúnmente utilizados para representar el infinito son el numérico, el algebraico y el geométrico. Sin embargo, de acuerdo con las dificultades asociadas con las representaciones, el registro semiótico de la teoría de conjuntos y la conexión que tiene con el concepto de función deben incluirse, partiendo desde la notación de Euler.

No obstante, para detectar cómo es posible comprender el concepto de infinito, resulta necesario identificar las dificultades del estudiante al razonar, si se tiene en cuenta el esquema intuitivo y el formal de la teoría de las prácticas del aprendizaje. Esto implica recurrir a métodos o modelos para describir en qué nivel o estadio se encuentran la comprensión y el razonamiento en las estructuras mentales de los educandos; al intentar analizar la relación del concepto de infinito en la construcción de otros objetos matemáticos. Para el caso particular, se utilizó el modelo educativo de van Hiele, el más pertinente para alcanzar el propósito de describir la comprensión.

En relación con lo anterior, al tratar de describir la diferencia entre infinito actual e infinito potencial en su estructura conceptual, es posible identificar dos formas de comprensión. En cuanto al infinito actual, puede entenderse como un conjunto sin fin, acabado, que remite a algo terminado, un objeto estático que puede construirse a partir de un proceso iterado pero delimitado. Más específicamente, la comprensión del infinito actual se evidencia cuando un estudiante puede identificar el infinito en una globalidad tomada desde un límite, es decir, un infinito limitado pero

El fenómeno de aplastamiento	El modelo intuitivo	El fenómeno de deslizamiento
Afirma que todos los conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal, no se acepta que el todo puede ser igual en magnitud a una de sus partes. Esta situación genera una contradicción entre lo formal y lo intuitivo.	Se basa en las disposiciones pictóricas para comprender el infinito, utiliza la antonimia parte-todo, esto es el todo no puede ser igual a una de sus partes.	Permite comprender la idea de biyección y correspondencia uno a uno, en él se establece la equivalencia entre conjuntos infinitos. Admite establecer y construir el concepto formal de infinito en matemáticas.

Figura 1. Las prácticas de aprendizaje de la noción de infinito.

Fuente: adaptado de Gamboa y Vargas [48].

existente: el todo cabe en cada una de sus partes. Esto permite inferir que el infinito se encuentra presente tanto en lo limitado como en lo ilimitado. En cuanto a la comprensión del infinito potencial, se entiende como un conjunto sin fin, susceptible de incremento ilimitado; el infinito potencial es la concepción de infinito como un proceso ilimitado que crece o decrece desbordadamente [24].

También se resalta que las paradojas de Cantor quebrantaron la confianza absoluta de los matemáticos en las concepciones de infinito actual. Algunos consideraban existente solo el infinito potencial, entendían que el concepto de infinito actual es contradictorio dado que, al adquirir realidad, la magnitud infinita deja de serlo y se convierte en finita. La solución del problema ha de buscarse en las propiedades del mundo real. El mundo material es infinito en el espacio y en el tiempo, no como posibilidad, sino como realidad. El mundo se desarrolla sin cesar, encierra en sí la posibilidad de ulteriores e ilimitadas transformaciones. De ahí que su infinitud sea al mismo tiempo potencial. La unidad entre infinito actual e infinito potencial se da, asimismo, en la estructura de la materia. Es de anotar que, para representar tal unidad, los métodos de investigación han de fundamentarse en el examen dialéctico de los conceptos de infinito actual y potencial [25].

Por otra parte, la diferencia entre el infinito potencial y el infinito actual está relacionada con la diferencia entre el devenir y el ser, entre el mundo de Heráclito y el de Parménides: “El infinito potencial se obtendría mediante procesos que no nos enfrentan en ningún momento con el infinito en su totalidad, sino con un infinito que aparece como posibilidad (en potencia) y que se puede perpetrar progresivamente” [25].

En los problemas relacionados con la concepción de infinito, están los obstáculos epistemológicos con el modelo de infinito como proceso sinfín; se concibe al infinito en la posibilidad de llevar a cabo un proceso iterado, tantas veces como se quiera, bien sea desde el punto de vista de la realización física o la realización mental. A su vez, la aceptación del axioma de Leibniz, el cual postula que el todo es mayor que una de sus partes, contradice la definición de infinito actual, un infinito delimitado pero existente, concebido por Cantor en términos de la cardinalidad de conjuntos al establecer una biyección entre sus elementos. En este punto, es necesaria una reflexión pedagógica y didáctica que permita considerar la comprensión de dualidad entre el infinito actual y el infinito potencial [24].

Los obstáculos didácticos se centran en la idea de concebir los números naturales como un conjunto con un número infinito de elementos; y que es posible construirlo a partir de la posibilidad de añadir siempre un elemento adicional. Los diversos obstáculos acerca del infinito actual se presentan de forma intuitiva y dependen de la representación de cada persona sobre este objeto matemático [26].

Al buscar un modelo adecuado y pertinente que permita describir la comprensión que tienen los estudiantes del concepto de infinito actual y, a su vez, poder analizar los procesos de razonamiento de los estudiantes, se observa que el modelo de van Hiele permite describir de forma apropiada dichos procesos mentales, dada la caracterización y la gradación que propone a través de sus cinco niveles de razonamiento. Otra situación relevante que motiva el desarrollo de la investigación tiene que ver con la necesidad de buscar estrategias para el diseño de instrumentos y técnicas apropiadas que permitan describir la manera como los estudiantes comprenden el concepto de infinito actual y su relación con otros objetos matemáticos.

De ahí que se opta por diseñar y validar una entrevista socrática fundamentada en el modelo de van Hiele, como instrumento pertinente para describir la comprensión del infinito actual. Con la entrevista socrática en la presente investigación, es posible acercar al investigador a la descripción del razonamiento de los estudiantes, mediante preguntas orientadoras, que describen e interpretan “lo que es”. A partir de las respuestas, el investigador encuentra información valiosa para determinar los niveles de razonamiento en que se encuentra el entrevistado.

En cuanto al uso del nuevo conocimiento obtenido, es posible establecer que la investigación cobra relevancia desde el punto de vista pedagógico, porque brinda información sobre la manera como los estudiantes de educación media interpretan los conceptos de infinito e infinito actual. Ello permite detectar aciertos y desaciertos en los métodos y estrategias de enseñanza del concepto en cuestión y su influencia en las funciones de variable real, en campos como la geometría, el análisis matemático y la teoría de conjuntos.

Asimismo, es importante tener en cuenta que analizar el infinito actual puede estimular la capacidad de crear, inventar, razonar y analizar situaciones, para resolverlas. Esto facilita el aprendizaje ya que se relacionan los contenidos con la cotidianidad de los estudiantes.

El modelo de van Hiele

El modelo de van Hiele surgió de las dificultades de aprendizaje de la geometría, y fue abordado por los esposos Pierre M. van Hiele y Dina van Hiele Geldof, quienes lo presentaron como resultado de sus disertaciones doctorales en la Universidad de Utrecht (Holanda). Hoy continúa vigente, dado que ha sido extendido a conceptos del análisis matemático en los últimos años. La experiencia de estos esposos, producto de su trabajo docente, los llevó a estudiar a fondo las dificultades que mostraban sus estudiantes al solucionar problemas, sin recurrir a ejercicios idénticos. Postularon que cuando ellos aprendían los conceptos de memoria no era suficiente para encontrar la solución. Por ello, el fracaso los llevaba a pensar que la matemática era difícil, en especial, la geometría [27].

El modelo de van Hiele ha sido implementado en diferentes investigaciones y, para el caso particular, se ha convertido en un modelo potente para describir de manera adecuada cómo los estudiantes comprenden el concepto de infinito y sus implicaciones en otros objetos matemáticos [27], toda vez que ya ha sido validado con conceptos del análisis matemático, asociados al infinito, tales como los de límite, derivada, continuidad e integral, entre otros.

A su vez, el modelo de van Hiele establece que el aprendizaje tiene niveles de razonamiento que hacen necesario un procedimiento didáctico para pasar de un nivel a otro. En el modelo, existen varios niveles de perfección en el razonamiento [6]. Un estudiante puede comprender conceptos matemáticos, si se le presentan de acuerdo con su nivel de razonamiento, pero si se le enseña en un nivel superior, puede surgir una ruptura en la comprensión. Acudiendo a las fases de aprendizaje que postula el modelo, a través de distintas situaciones didácticas es posible inducir a que el estudiante alcance un nivel de razonamiento superior.

La figura 2, muestra cómo los procesos establecidos en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele intervienen de forma directa en la comprensión de un objeto matemático. Aquí se destaca que la comprensión se construye de forma gradual, para avanzar por los niveles de razonamiento, y que se requiere instrucción e información adecuadas, suministradas por el docente o investigador. Este, a su vez, orienta en el momento oportuno y hace explícito lo que antes era implícito, para que a través de la orientación libre y el cuestionamiento permanente, se integre el conocimiento en una red de relaciones que se entrelazan al momento de razonar.

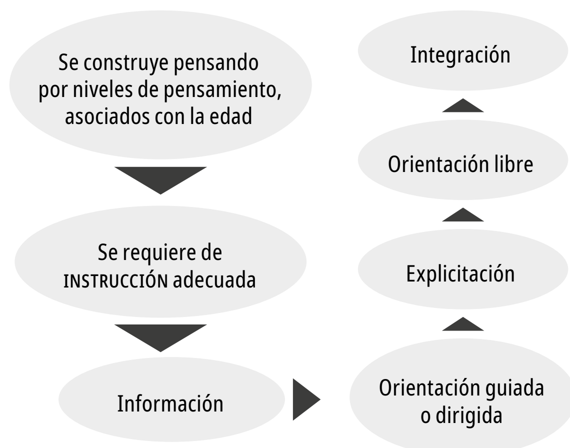


Figura 2. Modelo de van Hiele.

Fuente: tomado de Belmonte, Martínez y Sierra [21].

Asimismo, el modelo de van Hiele está validado por otros estudios, que lo han concebido como una elección adecuada para describir el razonamiento de un estudiante en conceptos de diferentes objetos matemáticos, iniciando por el de la geometría, el cual se ha llevado a escenarios escolares en diferentes partes del mundo [21]. Al implementar este modelo, se detonan actividades que permiten que el sujeto contraste conocimientos previos con los nuevos, para resignificar conocimientos matemáticos, centrándose en actividades prácticas para pasar a interpretar significados matemáticos verdaderos o falsos, que lo lleven a una reflexión en la solución de problemas [47].

Características de los niveles en el modelo de van Hiele

En estudios posteriores, se ha demostrado que los niveles de razonamiento que contempla el modelo pueden describir distintas formas de razonar, manifiestas en cada una de las cualidades que se evidencian al ubicar a un estudiante de acuerdo con su nivel de razonamiento [27], [22].

Es importante destacar que, originalmente, en el modelo de van Hiele se plantearon cuatro niveles de razonamiento (I, *II*, *III*, *IV*) y se enfatizaba en la importancia de los tres primeros; los niveles eran clasificados como *básico*, *visual*, *descriptivo* y *teórico*. El último fue denominado así, dado que es complejo detectarlo, por su carácter abstracto; mientras que los tres primeros son más evidentes.

Asimismo, Gutiérrez y Jaime [29] hablan de un nivel inicial o de conocimientos previos al cual denomina nivel 0 (básico, visual o predescriptivo). En consecuencia a los niveles restantes a los que se refiere, se describen de la siguiente manera: nivel I (descriptivo), nivel *II* (teórico) y nivel *III* (deductivo) [30].

A los cuatro niveles propuestos por los van Hiele, se añade un nivel anterior, denominado nivel 0 (predescriptivo) [49]; en el desarrollo de la presente investigación se utilizó la nomenclatura de los cinco niveles propuesta por Llorens, trabajando los cuatro primeros niveles, pues el último nivel de acuerdo con los van Hiele es un nivel de un rigor teórico profundamente abstracto:

- Nivel 0, predescriptivo
- Nivel I, de reconocimiento visual
- Nivel II, de análisis
- Nivel III, de clasificación, de relación
- Nivel IV, de deducción formal

Niveles de razonamiento según van Hiele

El interés de los niveles de razonamiento se enfoca en la importancia de lo que describen y sus características; de ellas depende la descripción de la comprensión y el razonamiento de los objetos matemáticos, en este caso, para el concepto del infinito actual y su relación con las funciones de variable real.

Gutiérrez y Jaime proponen un nombre específico a cada uno de los cuatro niveles iniciales propuestos por los van Hiele [31], [32], enunciados de la siguiente manera: nivel 1 (de reconocimiento), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación) y nivel 4 (de deducción formal).

Debido a su experiencia, en investigaciones posteriores, los van Hiele propusieron un nivel previo que describe los conocimientos anteriores o preconceptos de los estudiantes.

Por su parte, Moreno [33] y Vanegas [34] utilizaron los siguientes nombres para los cinco niveles de razonamiento: (1) visualización, descripción o análisis; deducción informal u ordenación; deducción formal; y rigor. Por último, Esteban, y J. Llorens usaron la siguiente nomenclatura, justamente, la empleada en la presente investigación: "Nivel 0: predescriptivo, Nivel I: de reconocimiento visual, Nivel *II*: de análisis, Nivel *III*: de clasificación, y Nivel *IV*: de deducción formal" [35, p. 42].

Para Rendón y Londoño [8], los niveles de razonamiento son una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles. El modelo educativo de van Hiele indica que existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a las matemáticas, cada nivel supone una forma de comprensión y un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento. Los niveles de razonamiento en relación con la comprensión del concepto de infinito actual y contemplados en la investigación son:

- ***Predescriptivo:*** en este nivel, los estudiantes describen los elementos básicos geométricos que posee la recta, de acuerdo con su forma y semejanza con otros objetos del entorno.

- ***Reconocimiento visual:*** en este nivel, el estudiante debe reconocer visualmente los elementos que componen una línea recta.
- ***Análisis:*** un estudiante en este nivel razona de manera implícita sobre el concepto de función y algunas de sus propiedades, para que, a través de este proceso, le sea posible establecer la relación con el concepto de infinito actual.
- ***Clasificación:*** un estudiante ubicado en este nivel está en la capacidad de establecer y analizar una relación de correspondencia de elementos, entre dos intervalos de números reales cualesquiera.

La entrevista socrática

El método socrático ha ganado un importante lugar en la educación matemática y en diversas investigaciones [36]-[40]. Además, ha facilitado construir conocimiento bajo una característica especial: el profesor, quien dirige el diálogo, asume una actitud de humildad que permite a los estudiantes sentirse cómodos en un nivel donde pueden participar abiertamente; en vez de decir qué o cómo debe pensarse, permite el descubrimiento del conocimiento por parte del estudiante.

Sucerquia *et al.* [41] y Jaramillo y Campillo [42] señalan que en una clase de matemáticas el diálogo debe permitir la expresión de ideas, conocimientos, razonamiento crítico y reflexivo, procesos argumentativos. Es decir, el diálogo matemático debe presentar características particulares que deben corresponder con las propias del diálogo socrático.

La entrevista socrática ha mostrado resultados interesantes para realizar seguimiento a la construcción y evolución de un concepto matemático por parte del alumno; también se ha considerado una herramienta fundamental en estos estudios, debido a que permite determinar los niveles de razonamiento a la luz del modelo de van Hiele [42].

Método

El método de investigación usado fue el estudio de caso, investigación que, mediante los procesos cuantitativo, cualitativo o mixto, permite analizar profundamente una unidad para responder al planteamiento del problema, probar hipótesis y desarrollar teoría [43]. El estudio se desarrolla con tres estudiantes de grado once de una institución educativa oficial colombiana, en las tres fases descritas a continuación.

Inicialmente, en la fase de *diseño,* se plantearon descriptores hipotéticos adecuados según el nivel de razonamiento que plantea el modelo de van Hiele, sometidos posteriormente a un proceso de verificación y refinamiento mediante pruebas piloto. En la fase de *acción* y, después de verificar que los descriptores cumplen y corresponden con cada nivel de razonamiento, se analizó la comprensión de los estudiantes en función de las actividades que ejecutan, para que el investigador pueda interpretarla y describirla con base en la interacción del estudiante con los objetos matemáticos [44].

En esta misma fase basada en los descriptores, se diseñó y validó la entrevista socrática semiestructurada mediante preguntas orientadas, reflexivas e inquisidoras que llevaron a los estudiantes a descubrir e interpretar las asociaciones entre el infinito y las funciones de variable real [45]. Las respuestas permitieron al investigador encontrar información valiosa para verificar los descriptores, describir y reconocer el nivel del razonamiento de los entrevistados.

Es importante destacar que el método socrático nace de los diálogos que sostenía Sócrates para llevar al individuo a encontrar la verdad sobre el conocimiento. Se considera una estrategia que promueve la reflexión de los objetos de estudio, a través de la duda o de ciertos momentos de contradicción que conllevan al estudiante a producir el conocimiento mediante una serie de preguntas y el análisis de sus respuestas, es decir, el conocimiento se construye a partir de la reflexión crítica de acuerdo con la situación planteada.

En este sentido, durante el desarrollo y la implementación de la investigación, se utilizó la entrevista semiestructurada socrática para describir la compresión de los estudiantes frente al concepto de infinito actual, a la luz del modelo de van Hiele. Se tuvieron en cuenta aspectos como el lenguaje para determinar la comprensión; mientras que el vocabulario y las relaciones significativas de conceptos fueron factores de análisis en el desarrollo de la investigación.

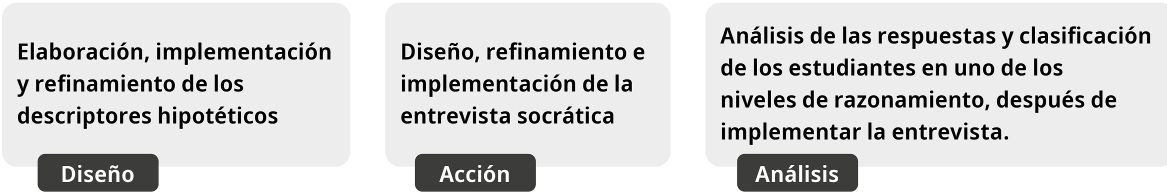


Figura 3. Fases de investigación.

Fuente: elaboración propia a partir del modelo de van Hiele.

Durante la investigación, se llevaron a cabo cuatro pilotos que permitieron refinar y ajustar la entrevista. Al final, se obtuvo una versión mejorada; al mismo tiempo, se logró refinar y validar los descriptores hipotéticos, hasta encontrar nuevos y definitivos descriptores. A través de este proceso, se entrelazó una red de relaciones durante toda la implementación, dado que, detrás de cada pregunta, se estableció un propósito que solo el entrevistador conocía. A medida que se avanzaba en la aplicación, el entrevistador pudo interpolar, relacionar, razonar, reflexionar e inferir a partir del constructo formado por la red de relaciones.

A lo anterior se suma la fase de *análisis* y la de interpretación de *resultados*, donde se analizan con profundidad las respuestas, gestos y actitudes de los entrevistados a quienes se aplicó la versión definitiva de la entrevista. A la luz del modelo de van Hiele y la perspicacia del entrevistador al momento de implementar y orientar la entrevista, este análisis fue sumamente importante para clasificar a cada estudiante en uno de los cuatro primeros niveles de razonamiento, según el modelo. De la confiabilidad de la entrevista y el direccionamiento del entrevistador depende, en gran medida, hallar las manifestaciones concretas de razonamiento, relacionadas con el concepto de infinito actual por parte de los entrevistados.

La investigación como forma de reflexión y evaluación, se realizó en las tres fases que se muestra en la figura 3.

Resultados

En el contexto de la entrevista semiestructurada socrática y el modelo de van Hiele, se tuvo en cuenta la secuencia de preguntas, variable con cada entrevista. Finalmente, a la luz de los descriptores y, en contraste con un guion de entrevista, fue posible determinar el nivel de razonamiento en que cada estudiante se encuentra.

A continuación, se exhibe, como muestra, el tratamiento de algunos descriptores de nivel finales (DN), los cuales surgieron mediante el refinamiento y validación de descriptores hipotéticos planteados inicialmente; además de las preguntas del investigador (PN) y algunas de las respuestas (RE) dadas por cada uno de los tres estudiantes (etiquetados como E1, E2 y E3). Es conveniente aclarar que los resultados de la investigación enfatizan en la descripción de la comprensión del concepto de infinito actual, a partir de la consecución de los descriptores enmarcados en los niveles del modelo de van Hiele, detallados a continuación.

Nivel 0. Predescriptivo. Permite identificar los conceptos básicos aritméticos y geométricos de los estudiantes, para llegar a la comprensión del concepto de infinito actual.

Un estudiante ubicado en el nivel cero debe cumplir con los siguientes descriptores (DN0):

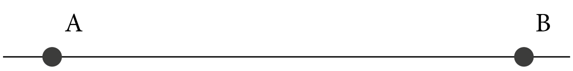
- DN01: diferencia los conceptos de recta y segmento de recta.
- DN02: identifica que la recta y el segmento de recta están conformados por muchos puntos.

Preguntas/actividades para el Nivel 0 (PN0):

Dados los puntos A y B, unirlos a través del trazo más corto:

- PN0.1: después de realizar el trazo más corto entre A y B, ¿qué nombre podría recibir este trazo y por qué?
- RE1: A y B pueden unirse con una línea; esta puede ser recta o curva, pero si me dice el más corto yo pienso, profe, que es una línea recta.
- PN0.2: ¿cuántos trazos como el anterior es posible construir al realizar la unión entre el punto A y el punto B?
- RE1: Si se lograran realizar trazos curvos de diferente medida que unan a los puntos A y B, se pueden construir muchos, pero como piden el más cortó, solo uno, a través de una línea derechita.

En la siguiente figura, ubicar dos puntos cualesquiera C y D entre los puntos A y B:



- PN0.3: ¿en cuántas partes quedó dividido el trazo de *A* a *B*?
- RE0.3**:** en ese trazo quedarían tres nuevos trazos, no sé si de igual tamaño, pero quedan tres, cuando se ubican los puntos *C* y *D*.
- PN0.4: después de haber ubicado los puntos *C* y *D* en el trazo anterior, ¿puedes indicar algún nombre para los nuevos trazos que surgieron?
- RE2: los trazos que se forman después de ubicar los puntos *C* y *D*, yo los llamaría subconjuntos del trazo *A* y *B*, pues los nuevos trazos son más pequeñitos.

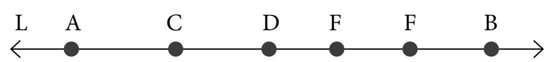
En las respuestas de los estudiantes se evidencia que relacionan intuitivamente los preconceptos o ideas preconcebidas afines al concepto de línea; y describen cómo se construye el concepto de línea recta, además de los elementos que la componen. Utilizan la comparación conceptual construida con otros objetos matemáticos. En particular, infieren una posible correspondencia entre los puntos de dos segmentos de recta congruentes, a través de la exploración y la experimentación. En consecuencia, se evidencia que las construcciones conceptuales de los objetos matemáticos a este nivel no son concretas, dado que los puntos *C* y *D* pueden determinar elementos que no son subconjuntos del segmento *AB*.

Nivel I. De reconocimiento visual. Para que un estudiante sea clasificado en este nivel debe reconocer visualmente los elementos que componen una línea recta, asociada al contexto aritmético de los números reales (recta real), a partir de su forma y su apariencia global. Esto permite relacionar cualquier intervalo real como un subconjunto de los reales. Algunos descriptores (DN1) para este nivel son:

- DN1.1: identifica de forma visual segmentos de línea, e infiere que a partir de ellos es posible establecer un intervalo real.
- DN1.2: determina un intervalo de números reales como un subconjunto del conjunto de todos los reales.

Preguntas para el nivel I (PN1):

- PN1.1: dada la recta *L*, teniendo en cuenta los puntos que se ubican en ella, indicar cuántos segmentos de recta pueden construirse en *L*, a partir de los puntos indicados.



- RE3**:** se pueden construir más de once segmentos, pues a partir de *A*, si involucramos los otros puntos, se pueden construir diferentes pedacitos de línea recta, o bueno, segmentos.
- RE2**:** creo que siete segmentos, si se cuenta el que inicia a la izquierda y termina en *A* y el que inicia en *B* y no termina.
- PN*1.2*: al suponer que cada punto ubicado en la recta *L* representa un número real cualquiera, ¿puedes indicar cuántos números reales hay entre los puntos *C* y *D*?
- RE1: pues si esos punticos son números, yo pienso que debe haber muchos números entre *C* y *D*, claro que no se puede decir cuántos números hay, sería difícil contar cada puntico.
- PN1.3: suponiendo que la recta *0* representa la recta real y cada uno de los puntos que es posible representar en ella son números reales, muestra gráficamente la región limitada entre los puntos *A* y *C*; también, muestra la región limitada entre los puntos *C* y *F*. ¿Cuál de las dos regiones tiene mayor cantidad de puntos o

números reales?

- RE3: si uno mira por el tamaño a simple vista, se puede decir que la región que está entre *C* y 0 es más grande que la otra, pero si uno juiciosamente se pone a contar cada uno de los punticos que están en cada región, son muchísimos puntos, creo que no podría decir cuántos.
- PN1.4: supón que la recta *L* representa la recta real y cada uno de los puntos que es posible representar en ella son números reales. Si el punto A representa el número 2 y el punto C representa el número 3, ¿cuántos números reales hay en el intervalo [2,3]?
- RE2: como cada punto representa un número real, creo que entre 2 y 3 debe haber muchos números reales, y tal vez no se pueden mencionar todos, pues son muchos, al igual si comparamos esos números con puntos serán infinitos números y puntos.

En este nivel, los entrevistados infieren e intentan establecer la relación entre el tamaño de segmentos ubicados en la recta real y la cantidad de elementos que los componen (números reales), al hacer comparaciones de acuerdo con la magnitud visual entre dos regiones limitadas. Intuitivamente, exploran y dan definiciones básicas que pueden ser relacionadas con el concepto de intervalo. A su vez, relacionan la cantidad de puntos o números reales en un intervalo con la noción de cantidad. Se aproximan a la definición del concepto de infinito actual, sabiendo que existe un infinito limitado pero presente. Es importante utilizar las propias palabras del entrevistado, para convencerlo de que sabe menos de lo que pensaba, por lo que se ve este forzado a abrir su mente a nuevas y posibles respuestas que no había considerado.

Nivel II. De análisis. En este nivel, los estudiantes analizan los elementos básicos de una función y su relación con el concepto de infinito actual. Las deducciones y la extensión de sus propiedades tienen un carácter informal. Un estudiante ubicado en el nivel II (DN2) debe cumplir con los siguientes descriptores:

- DN2.1: describe intuitivamente una función, partiendo del concepto de correspondencia, teniendo en cuenta relaciones establecidas entre conjuntos.
- DN2.2: ordena en la recta real cualquier conjunto de números reales.

Preguntas para el nivel II (PN2):

- PN2.1: observar la siguiente relación: f(n): N→2N (N: números naturales y 2N: números naturales pares). A partir de ella, indicar la correspondencia para los cinco primeros números naturales.
- RE1: haciendo el reemplazo, se puede ver que uno se relaciona con dos, dos con cuatro, tres con seis, cuatro con ocho, y cinco con diez; como van de dos en dos, o el doble del número.
- PN2.2: suponiendo que se realizara la correspondencia f(n): N→2N, para todos los números naturales, es decir que a cada número natural, le correspondiera el doble de este, indica si algún número natural (N) se queda sin relacionarse.
- RE2: pensándolo de esa manera, ninguno de los números de N se quedaría sin pareja, pues cada uno siempre se relacionará con su doble, todos se relacionan entre sí.
- PN2.3: dada la relación f(n): N→2N, ¿podrías indicar cuántos números tiene N y cuantos números tiene 2N?, ¿cuál de los dos conjuntos (N o 2N) tiene mayor cantidad de elementos?, ¿por qué? (Sabiendo que n es un número natural cualquiera, N representa el conjunto de los números naturales, y 2N representa el conjunto de los naturales pares).
- RE3: inicialmente, yo pensé que el conjunto *N* era más grande que 2N, pues en los naturales uno cree que están tanto los números pares como los impares, pero cuando comencé a relacionar uno a uno me di cuenta de que los dos conjuntos son iguales, porque ninguno de los números de N se queda solito, siempre se podrá relacionar con su doble.

Es importante resaltar la manera como los estudiantes van modificando algunas concepciones iniciales de los estudiantes sobre la cantidad de elementos que posee un conjunto al realizar la comparación con la cantidad de elementos de uno de sus subconjuntos. Esta experiencia muestra que, intuitivamente, los estudiantes vinculan el concepto de infinito actual con la relación biunívoca a partir de la cardinalidad entre conjuntos.

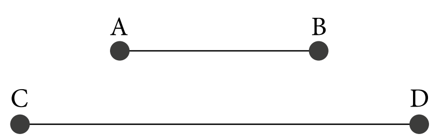
Cuando el estudiante E3 infirió que entre N y 2N se establece una relación uno a uno en la que no sobran elementos en el conjunto 2N, es posible evidenciar de forma implícita que se utiliza la clasificación de las funciones, más precisamente, en el aspecto que tiene que ver con las funciones biyectivas. Se destaca el papel del investigador, pues este debe utilizar cuestionamientos propicios que no estén precisamente enmarcados en la entrevista, pero que se relacionen con ella, que permitan eliminar las barreras que le impiden conseguir un nivel superior de comprensión al entrevistado.

Nivel III. De clasificación o relación. En este nivel, los estudiantes analizan los procesos básicos que se establecen mediante una relación de correspondencia, comparando el cardinal de dos conjuntos numéricos, lo que permitirá inferir que el cardinal de un intervalo de números reales con más de un elemento (se exceptúa el intervalo vacío y el intervalo unitario o degenerado) es igual al cardinal de los números reales.

Un estudiante ubicado en el nivel *III* (DN3) debe cumplir con los siguientes descriptores:

- DN3.1: afirma que a un intervalo de números reales le corresponde la misma cantidad de números reales que cualquier intervalo contenido en él.
- DN3.2: tiene claro que los números reales están compuestos por infinitos subconjuntos propios infinitamente divisibles.

Preguntas para el nivel *III* (PN3):
Al observar el segmento *AB* y el segmento *CD*.



- PN3.1: ¿cuál de los dos segmentos tiene mayor cantidad de puntos?
- RE1*:* a simple vista, por el tamaño, se puede observar que el segmento *CD* tiene más puntos.
- Instrucción: intenta relacionar cada punto del segmento *CD* con un punto en el segmento *AB*, usando de diversos trazos. Muestra gráficamente cómo lo haces.
- PN3.2: ¿cuál de los dos segmentos tiene mayor cantidad de puntos?
- RE1**:** Inicialmente pensé que el segmento *CD* tenía mayor cantidad de puntos por el tamaño; pero como empecé a relacionar punto a punto, me doy cuenta de que no por el tamaño se podía indicar la cantidad de puntos. Después de que los relacioné, encontré que sí podían relacionarse todos los puntos del segmento *CD* con todos los puntos del segmento *AB*. Es genial ver cómo los dos tienen la misma cantidad de puntos y esa cantidad son muchos.

Es de gran interés observar cómo a través de la experimentación, los estudiantes modifican estructuras conceptuales basadas en la observación, y pueden comprobar que sin importar la magnitud de un segmento, la cantidad de puntos que contienen es la misma, lo que los conduce a inferir intuitivamente la idea de infinito actual. Al utilizar el método socrático en el diseño e implementación de la entrevista, se vislumbra cómo el entrevistado por sí mismo, conducido por las preguntas y sus respuestas, logra salir de un estado de confusión, después de haber sido confrontado por el entrevistador.

Conclusiones

Durante la implementación de la investigación, se realizó una entrevista socrática individual a tres estudiantes del grado once de una institución educativa oficial colombiana, para analizar su proceso de razonamiento con respecto a la comprensión de la relación mencionada. El objetivo fue describir el proceso de razonamiento de cada estudiante y ubicarlos en uno de los niveles de razonamiento del modelo de van Hiele.

El estudiante E1, por su desempeño y forma de razonar, revela un nivel tres, de acuerdo con los niveles del modelo de van Hiele. Se aprecia que tiene claros los preconceptos de recta, punto y segmento.

Construyó estos conceptos a través de la exploración e implementación de la entrevista socrática, lo que le permitió aproximarse intuitivamente al concepto de infinito actual, desde la definición de Cantor en cuanto a la relación entre un conjunto y sus subconjuntos. Se observó que el estudiante trasciende la simple idea de infinito actual como *cantidad*, pues en su forma de razonar es posible establecer que sus concepciones reflejadas en sus respuestas dan cuenta de que sin importar el tamaño de un segmento, en comparación con otros, es posible inferir que tienen igual cantidad de puntos.

El estudiante E2 analizó los elementos básicos que lo llevan a aproximarse al concepto de función, de acuerdo con análisis de sus respuestas y su forma de enfrentar las preguntas planteadas en la entrevista. Pero se le dificultó realizar una relación entre este y el concepto de infinito, por lo que se ubica en un nivel dos de razonamiento del modelo de van Hiele. Para que el estudiante cumpliera con los descriptores necesarios, se hizo conveniente usar un metalenguaje más simple.

El estudiante E3, de acuerdo con el modelo de van Hiele, se ubicó en el nivel tres de razonamiento. En sus respuestas se evidencia que comprende cómo es posible llegar a los mismos resultados partiendo de proposiciones o premisas distintas, empleando el razonamiento formal. Desde el comienzo, mostró la relación del concepto de infinito con cantidades que crecen o decrecen sin límites (infinito potencial). No obstante, al interactuar con el investigador, manifestó la relación entre intervalos de números reales con más de un elemento y la cantidad infinita de números reales contenidos en ellos, estableciendo la presencia del infinito actual, un infinito que permite inferir que el todo cabe en cualquiera de sus partes.

La utilidad de la entrevista socrática radica en que el estudiante reflexione no solo acerca de las preguntas, sino de sus propias respuestas y llegue a relacionar y tener conciencia de las propiedades que utiliza en sus razonamientos [46]. De esta manera, este tipo de entrevista constituye una herramienta potente para observar la evolución del razonamiento de un estudiante, en una experiencia de aprendizaje al permitir avanzar en el nivel de razonamiento.

Entre los resultados encontrados en la investigación, fue posible establecer que la entrevista socrática estimuló la capacidad de razonar y analizar procesos de razonamiento infinito en los entrevistados. Ello permitió que pudieran construir una relación entre el concepto de infinito actual y otros objetos matemáticos.

Frente a la importancia de estudiar la comprensión, es necesario indagar sobre las manifestaciones y actuaciones de los estudiantes sobre los objetos matemáticos, sus puntos de partida y la dirección en la que su pensamiento matemático le permite establecer relaciones de lo concreto con lo abstracto o viceversa. La conciencia de la comprensión da seguridad, cuando el estudiante ve relaciones nuevas que no había notado antes, entonces se habla de la formación de una nueva estructura de pensamiento, en el contexto del modelo de van Hiele.

Es necesario indagar sobre la importancia de la noción de infinito en los estudiantes, teniendo un acercamiento teórico, y reflexionar sobre los procesos de adquisición de conceptos matemáticos abstractos. A su vez, este trabajo es un punto de partida para otros estudios en cuanto a la pertinencia de las temáticas abordadas y el establecimiento de los niveles de abstracción de las ideas matemáticas abstractas, niveles de rigor en la lógica y desarrollo de la imaginación y el pensamiento matemático de los estudiantes. Se espera que, luego de comprender conceptos, los estudiantes logren desarrollar otros procesos complejos y lleguen a niveles de abstracción mayor.

De otro lado, es posible afirmar que el estudio y el análisis de la comprensión del concepto de infinito actual no se reduce a cálculos, problemas algebraicos o valores numéricos exageradamente grandes, sino que está presente en objetos de naturaleza infinitamente pequeña o bien infinitamente grande, allí el estudiante debe trascender la concepción del infinito como cantidad, para establecer la diferencia entre el infinito actual y el infinito potencial.

Referencias

[1] R. Cantoral, *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*. México: Trillas, 2005.

[2] G. Cantor, *Contributions to the founding of the theory of transfinite numbers. Republication of the original translation of 1915*. Nueva York: Dover Publication Inc, 1955.

[3] C. Dolores y M. del S. Valero, "Estabilidad y cambio de concepciones alternativas acerca del análisis de funciones en situación escolar", en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 17, 2004, pp. 355-361.

[4] F. Gutiérrez y D. Prieto, *Mediación pedagógica. Apuntes para una educación a distancia* Buenos Aires: Ciccus-La Crujía, 1999.

[5] P. Esteban, *Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia. España, 2003.

[6] S. Zapata y Z. Sucerquia, "Módulo de aprendizaje para la comprensión del concepto de serie de términos positivos", Tesis doctoral, Departamento de Educación Avanzada, Universidad de Medellín, Medellín, Colombia, 2009.

[7] F. Londoño, C. Jaramillo y P. Esteban, "Estudio comparativo entre el modelo de van Hiele y la teoría de Pirie y Kieren. Dos alternativas para la comprensión de conceptos matemáticos", *Rev. Logos Cienc. Tecnol.*, vol. 9, n.º 2, pp. 121-133, 2017. Doi: https://doi.org/10.22335/rlct.v9i2.451

[8] R. Rendón y R. Londoño, "La comprensión del concepto de continuidad en el marco de la teoría de Pirie y Kieren", *Uni-Pluriversidad*, vol. 13, n.º 3, pp. 109-118, 2014.

[9] T. Ibarra, *Relaciones proporcionales entre segmentos en el contexto del modelo de van Hiele*, Tesis de maestría, Departamento de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia, 2014.

[10] J. Llorens y M. Prat, "Extensión del Modelo de van Hiele al concepto de área", *Rev. Virtual Univ. Cat*ólica Norte, vol. 45, pp. 113-128, 2015.

[11] J. Prieto-Sánchez, *Estudio del infinito actual como identidad cardinal en estudiantes de educación secundaria de 13 a 16 años*, Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Málaga, Málaga, España, 2015.

[12] A. Mena, J. Mena, E. Montoya, A. Morales y M. Parraguez, "El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 18, n. 3, pp. 329-358, 2015. Doi: http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1832

[13] M. Garelik, "El infinito: problemas para el aprendizaje en un tema de cálculo", *Revista Premisa*, vol. 18, n.º 68, 2016.

[14] R. Vicent, "Nociones del infinito en futuros profesores de matemática", *Areté*, vol. 4, n.º 8, pp. 61-85.

[15] E. Lévinas, *Totalidad e infinito. Ensayo sobre la exterioridad*, Salamanca: Sígueme-Hermeneia, 2002.

[16] M. Gardella, "El testimonio de Aristóteles sobre Zenón de Elea como un detractor de 'lo uno'", *Eidos*, vol. 23, pp. 157-181, 2015.

[17] P. Lestón, *Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares*, Tesis de Maestría, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México, México, 2007.

[18] A. Keliner, *El cambio basado en el aprendizaje. Realidades sobre la transformación*, México: Oxford University Press, 2000.

[19] I. Kidron y D. Tall, "The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process", *Educ. Stud. Math.*, vol. 88, n.º 2, pp. 183-199, 2015.

[20] S. Jato, *El infinito en las matemáticas de la enseñanza secundaria*, Tesis de Maestría, Universidad de Cantabria, Santander, España, 2012.

[21] J. Belmonte, M. Martínez y S. Sierra, "Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 14, n.º 2, pp. 139-171, 2011.

[22] J. Belmonte, *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de educación primaria, secundaria obligatoria, bachillerato y universidad*, Tesis doctoral, Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Salamanca, 2009.

[23] D. Arrigo y S. Sbaragli, *Infiniti Infiniti*. Bogotá: Trento-Erickson Magisterio, 2011.

[24] G. Arrigo y B. D'Amore, "Lo veo, pero no lo creo. Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual", *Educación Matemática,* vol. 11, n.º 1, pp. 2-24, 1999.

[25] A. Palacios, P. Barcia, J. Bosch y N. Otero, *Los matematicuentos. Presencia matemática en la literatura*. Argentina: Serie Eureka, 1995.

[26] S. Roa y A. Oktaç, "El infinito potencial y actual: descripción de caminos cognitivos para su construcción en un contexto de paradojas", *Revista Educación Matemática*, vol. 26, n.º 1, pp. 73-101, 2014.

[27] A. Hoffer, “Van Hiele based research”. En *Adquisition of mathematics concepts and processes,* R. Lesh y M. Landau, Eds. Nueva York: AcademicPress, 1983, pp. 205-227.

[28] D. Fuys, *An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*, Nueva York: Brooklyn College, 1985.

[29] J. Gutiérrez y A. Jaime, *Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de van Hiele*, Alfar (Sevilla): Teoría y Práctica en Educación Matemática, 1990.

[30] J. Llorens, *Extensión del modelo de van Hiele a un ámbito diferente de la geometría en niveles educativos elementales,* Tesis doctoral, Matemáticas, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 1995.

[31] R. Antezana, U. Cayllahua, E. Yalli y A. Rojas, “Modelo van Hiele y software GeoGebra en el aprendizaje de estudiantes en áreas y perímetros de regiones poligonales. *Horizonte de la Ciencia* [En línea], vol. 10, n.° 18, 2020. Doi: https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2020.18.418

[32]S. Sarrín, “Rotaciones y niveles de razonamiento, según el modelo de van Hiele: resultados de una experiencia. *Educación*, vol. 28, n.° 54, pp. 127-158, 2019. https://dx.doi.org/10.18800/educacion.201901.007

[33] A. Moreno, *Mejorar las competencias matemáticas en los profesores de la enseñanza primaria de Porto Amboim, Cuanza Sur Angola. Una propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría basada en el modelo de van Hiele y fundamentada en el uso de las TIC,* Tesis doctoral, Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Universidad de Granada, Granada, España, 2017.

[34] M. Venegas, *Niveles de razonamiento geométrico de van Hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con estudiantes de 13 a 16 años en Cantabria,* Tesis de maestría, Matemáticas, Universidad de Cantabria, España, 2015.

[35] P. Esteban y J. Llorens, “Aspectos comparativos en la extensión del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local”, *Suma*, vol. 44, pp. 45-52, 2003.

[36] C. Jaramillo, *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, España, 2000.

[37] A. de la Torre, *La modelización del espacio y del tiempo. Su estudio vía el modelo de van Hiele*, Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, España, 2000.

[38] P. Esteban, *Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele,* Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, España, 2000.

[39] Z. Santa, *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de van Hiele,* Tesis de maestría, Departamento de Educación Avanzada, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia, 2011

[40] M. Prat, *Extensión del modelo de van Hiele al concepto de área*, Tesis doctoral, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, España, 2015.

[41] E. Sucerquia, R. Londoño y C. Jaramillo, “El teorema fundamental del cálculo en la educación a distancia online”, en *VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática – Ciem - Ulbra Canos /RS - Brasil*, 2013, pp. 1-16.

[42] C. Jaramillo y P. Campillo, “Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele”. *Divulgaciones Matemáticas*, vol. 9, n.° 1, pp. 65-84, 2001.

[43] R. Hernández, C. Fernández y M. Baptista, “Metodología de la investigación”, 6.ª ed. México: McGraw-Hill, 2014.

[44] C. Sandoval, *Investigación cualitativa*. Bogotá: Icfes, 2002.

[45] C. Jaramillo, R. Londoño y H. Jurado, *Una metodología alternativa para la comprensión de la noción de límite. El caso de la convergencia de series de términos positivos*. Madrid: Editorial Académica Española, 2012.

[46] A. De la Torre, “El método socrático y el modelo van Hiele”, *Lecturas Matemáticas*, vol. 24, n.° 2, pp. 99-121, 2003.

[47]P. Suárez, *El aprendizaje de la geometría fractal*, Tesis doctoral, Educación, Rudecolombia, Tunja, Colombia, 2011.

[48] A. Gamboa y J. Vargas, “El modelo van Hiele y la enseñanza de la geometría”, *Uniciencias*, vol. 27, N.° 1, pp. 81-83. 2013.

[49] J. Land, *Appropriateness of the van Hiele model for describing students´ cognitive processes on algebra tasks as typified by college students´ Learning of Functions*. Boston: University of Boston, 1991.